ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 201X, том X, №Y.

= **МАТЕМАТИКА** =

УДК 517.925.42

ВЫРОЖДЕННЫЕ РЕЗОНАНСЫ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ В ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ С МАЛОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ДИВЕРГЕНЦИЕЙ

О. Ю. Макаренков, И. С. Мартынова

Представлено академиком С. Н. Васильевым

В работе показывается, что связанные с именами Боголюбова [1], Малкина [9] и Мельникова [11] классические условия бифуркации T-периодических решений в аналитических дифференциальных уравнениях вида

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

в окрестности T-периодического цикла x_0 соответствующей порождающей системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

могут быть существенно ослаблены, коль скоро возмущенная система (1) обладает следующим свойством отрицательности дивергенции

$$\sum_{i=1,2} (f_i)'_{x_i} + \varepsilon (g_i)'_{x_i}(t, x, \varepsilon) < 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in V,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{3}$$

Здесь $V \in \mathbb{R}^2$ – какая-нибудь окрестность кривой $t \mapsto x_0(t)$ и $\varepsilon_0 > 0$ – любая подходящая константа.

Результаты классической теории возмущений [1, 9, 11] связаны с разложением оператора Пуанкаре $\mathcal{P}_\varepsilon$ за период $T > 0$ возмущенной системы (1) по степеням малого параметра ε:

$$\mathcal{P}_\varepsilon(\phi(x, \varepsilon)) = \phi(x, \varepsilon) + \varepsilon^\lambda \overline{f}(x) + \varepsilon^{2\lambda} \overline{\overline{f}}(x) + ...,$$

где $\lambda \in (0, 1]$, $\phi(\cdot, \varepsilon)$ – подходящая взаимооднозначная замена переменных и $\overline{f}$, $\overline{\overline{f}}$ и т. д. – так называемые бифуркационные функции 1-го, 2-го и т. д. порядков. Для бифуркации T-периодического решения системы (1) из решения x_0, таким образом, необходимо, чтобы $x_0(0)$ был нулем бифуркационной функции первого порядка. Невырожденность данного нуля, то есть обратимость производной бифуркационной функции первого порядка в $x_0(0)$, является достаточным условием бифуркации. Невырожденность нуля бифуркационной функции первого порядка имеет место в следующих основных ситуациях

1. Боголюбов [1]: все решения системы (2) – T-периодические и $x_0(0)$ является простым нулем функции усреднения

$$\overline{f}(v) = \int_0^T \Omega'_x(0, \tau, \Omega(\tau, 0, v)) g(\tau, \Omega(\tau, 0, v), 0) d\tau,$$

где $\Omega(\cdot, t_0, v)$ – решение системы (2) с начальным условием $x(t_0) = v$.

2. Мельников [11]: решение системы (2) с любым начальным условием v – периодическое с периодом $T(v)$, $s = 0$ является простым нулем период-функции $s \mapsto T(x_0(0) + \dot{x}_0(0)^{\perp} s)$, где $v^{\perp} = \mathrm{col}(-v_2, v_1)$, и $\theta = 0$ является простым нулем субгармонической бифуркационной функции Мельникова $\theta \mapsto \pi_E(x_0(\theta))\overline{f}(x_0(\theta))$, где $\pi_E(x_0(\theta))$ – определенная 2x2-матрица.

3. Малкин [9, Гл. VI, §2]: матрица $\Omega'_x(T, 0, x_0(0))$ имеет отличное от ± 1 собственное значение и так называемая бифуркационная функция Малкина-Луда $\theta \mapsto \pi_A(x_0(\theta))\overline{f}(x_0(\theta))$, где $\pi_A(x_0(\theta))$ – 2x2-матрица, имеет $\theta = 0$ простым нулем.

Если ни одно из указанных 3-х типов условий не выполнено, приходится задействовать бифуркационную функцию $\overline{\overline{f}}$ 2-го и высших порядков. Полученные периодические решения называются в этом случае вырожденными резонансами. Для доказательства существования вырожденных резонансов оказывается полезной имеющаяся в системе дополнительная структура, см. Тхай [14]. В общем же случае условия бифуркации выписываются в терминах решений вспомогательных полиномиальных уравнений, см. Копнин [5], Yagasaki [15].

В работах многих авторов (см. ссылки в [10, 3, 8]) показывалось, что условия на невырожденность нулей бифуркационных функций может быть заменено невырожденностью их топологического индекса. Однако устойчивость соответствующих периодических решений возмущенной системы явно доказана (Макаренков-Ортега [7]) только для случая Малкина. В этой статье, пользуясь одним лишь топологическим индексом и ограничиваясь случаем возмущенных систем (1) с аналитическими правыми частями и отрицательной дивергенцией (быть может не имеющей места при $\varepsilon = 0$), предлагаются результаты об устойчивости также в случаях Боголюбова и Мельникова.

1. Рассмотрим сначала ситуацию Боголюбова. Напомним, что система (1) с T-периодической по t правой частью является аналитической в некоторой окрестности, если правая часть разлагается в этой окрестности в ряд по степеням фазовой переменной и сходимость рассматриваемого ряда равномерна по t и ε. Ниже мы используем понятие индекса Пуанкаре $\mathrm{ind}(v_0, \overline{f})$ изолированного нуля v_0 векторного поля $\overline{f}$, который определяется как топологическая степень $\mathrm{d}(\overline{f}, U)$ поля $\overline{f}$ относительно границы малой отрытой окрестности U точки v_0, см. [6]. Топологическую степень в рассматриваемой двумерной ситуации можно определить как число полных оборотов, совершаемых вектором $\overline{f}(v(\theta))$, в то время как $v(\theta)$ обходит v_0, при изменении θ от 0 до 2π, против часовой стрелки вдоль границы ∂U окрестности U. При этом, каждый из таких полных оборотов засчитывается с положительным или отрицательным знаком в зависимости от того достигает вектор $\overline{f}(v(\theta))$ вектора $\overline{f}(v(0))$ против часовой стрелки или по ее направлению, см. [6].

Теорема 1. *Предположим, что рассматриваемая возмущенная система (1) имеет T-периодические по t правые части и является аналитической в малой окрест-*

ности V T-периодического решения x_0, а все решения порождающей системы (2) из данной окрестности являются T-периодическими. Если выполнено условие отрицательности дивергенции (3) и

$$\operatorname{ind}(x_0(0), -\overline{f}) > 0, \tag{4}$$

то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (1) имеет по крайней мере одно асимптотически устойчивое T-периодическое решение x_ε такое, что $x_\varepsilon \to x_0$ при $\varepsilon \to 0$.

Пример 1. Рассмотрим следующий вариант уравнения Дуффинга: $\ddot{u}+\varepsilon c\dot{u}+\varepsilon^3 au+\varepsilon^2 bu^3 = \varepsilon^2\gamma\cos\omega t$, в котором $a, b, c, \gamma, \varepsilon > 0$. Функция u является решением данного уравнения тогда и только тогда, когда $x = (u, (1/\varepsilon)\dot{u})$ – решение системы

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & \varepsilon x_2, \\ \dot{x}_2 & = & -\varepsilon c x_2 - \varepsilon^2 a x_1 - \varepsilon b(x_1)^3 + \varepsilon\gamma\cos\omega t. \end{array} \tag{5}$$

Соответствующая функция усреднения $\overline{f}$ выписывается как $\overline{f}(v) = \operatorname{col}(v_2, -bv_1^3 - cv_2)$, и имеет единственный нуль $v_0 = 0$. Поэтому, бифуркация $2\pi/\omega$-периодического решения системы (5) возможна из одного лишь решения $x_0(t) \equiv 0$. Однако, $\det\|\overline{f}'(0)\| = 0$ и усреднение по первому приближению не позволяет доказать существование бифуркации. Вместо вычисления высших приближений применим теорему 1, поскольку вычисление дивергенции в формуле (3) приводит для системы (5) к выражению $-\varepsilon c$, то есть является отрицательной. Замечая, что векторное поле $\overline{f}$ линейно гомотопно тождественному на мылых окружностях с центрами в $v_0 = 0$, приходим к заключению $\operatorname{ind}(0, -\overline{f}) = 1$. Значит, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (5) действительно имеет по крайней мере одно асимптотически устойчивое $2\pi/\omega$-периодическое решение, сходящееся к 0 при $\varepsilon \to 0$.

2. Перейдем к ситуации Мельникова. Ниже, под сходимостью векторов $v_\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ к множеству $x_0(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \to 0$ понимается сходимость в метрике Хаусдорфа.

Теорема 2. *Предположим, что рассматриваемая возмущенная система (1) имеет T-периодические по t правые части и является аналитической в малой окрестности $V \subset \mathbb{R}^2$ T-периодического цикла x_0. Пусть далее ни одно из решений порождающей системы (2) из множества $V \backslash x_0(\mathbb{R})$ не является T-периодическим. Если выполнено условие отрицательности дивергенции (3) и*

$$\mathrm{d}(-\overline{f}, U) \neq 1, \tag{6}$$

где U – внутренность цикла x_0, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (1) имеет по крайней мере одно асимптотически устойчивое T-периодическое решение x_ε такое, что $x_\varepsilon(0) \to x_0(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \to 0$. Начальное условие $x_\varepsilon(0)$ приближается к $x_0(\mathbb{R})$ изнутри или снаружи в зависимости от того $\mathrm{d}(-\overline{f}, U) > 1$ или $\mathrm{d}(-\overline{f}, U) < 1$.

Проверка условия (6) может проводиться на основании анализа классических бифуркационных функций Малкина и Мельникова. Приведем один такой критерий [8].

Обозначим через z_A решение уравнения $\dot{z} = -(f'(x_0(t)))^* z$ с начальным условием $z_A(0) = (1/\|\dot{x}_0(0)\|^2)\,\dot{x}_0(0)$, а через z_E – решение данной линейной системы с начальным условием $\widetilde{z}_E(0) = \mathrm{col}(-\dot{x}_{0,2}(0), \dot{x}_{0,1}(0))$. Положим

$$M_j(\theta) = \int_\theta^{\theta+T} \langle z_j(\tau), g(\tau-\theta, x_0(\tau), 0)\rangle\, d\tau, \quad j = A, E.$$

Если M_E имеет на $[0,T)$ ровно два нуля θ_1, θ_2 и является в них строго монотонной, а для функции M_A выполнено условие $M_A(\theta_1)M_A(\theta_2) < 0$, то $\mathrm{d}(-\overline{f}, U)$ принимает либо значение 0, либо значение 2.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2\left(\frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 - 2)^p + 1\right) \\ \dot{x}_2 &= -x_1\left(\frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 - 2)^p + 1\right) - \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon \sin(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Порождающая система допускает семейство циклов $x_{0,\alpha}(t) = \mathrm{col}\left(\alpha \sin\left((2\pi/T(\alpha))t\right), \alpha\cos\left((2\pi/T(\alpha))t\right)\right)$ с периодами $T(\alpha) = 2\pi/((1/4)(\alpha^2-2)^p + 1)$. При $\alpha = \sqrt{2}$ для период-функции имеем $T(\alpha) = 2\pi$, $T'(\alpha) = ... = T^{(p-1)}(\alpha) = 0$, $T^{(p)}(\alpha) \neq 0$ и усреднение по первому приближению (или стандартный метод Мельникова) не применимо. Вычисление высших приближений для данного примера проведено в [15]. Для дивергенции системы (7) получаем значение $-\varepsilon^2$, то есть условие (3) выполнено. Поэтому, вместо привлечения высших приближений мы используем теорему 2. При любом $p \in \mathbb{N}$ для функций M_A и M_E получаем выражения $M_A(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\cos(\theta)$, $M_E(\theta) = -\sqrt{2}\pi\sin(\theta)$. Условия указанного выше критерия выполнены (два нуля на интервале $[0, 2\pi)$ даются формулами $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$), поэтому условие (6) выполнено. Применяя теорему 2, заключаем, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (7) имеет асимптотически устойчивое 2π-периодическое решение, сходящееся при $\varepsilon \to 0$ к кругу радиуса $1/\sqrt{2}$.

3. Обсудим основные идеи доказательства предложенных теорем. Для получения результатов теорем 1 и 2 прежде всего доказывается положительность топологической степени оператора Пуанкаре возмущенной системы относительно окрестности точки $x_0(0)$ в случае теоремы 1 и относительно внутренней и внешней окрестностей множества $x_0(\mathbb{R})$ в случае теоремы 2. В первом случае используется результат Мавена [10], а во втором теорема Каменского-Макаренкова-Нистри [3] в сочетании с результатом Capietto-Mawhin-Zanolin [2]. Далее используется свойство (3) и теорема из Nakajima-Seifert [12], которая позволяет заключить существование у возмущенной системы (1) изолированного T-периодического решения с индексом Пуанкаре $+1$. Наконец, асимптотическая устойчивость такого решения следует из теоремы Колесова-Ортега [4, 13].

Исследования авторов поддержаны грантом Президента РФ для молодых кандидатов наук (МК-1530.2010.1) и грантом РФФИ 09-01-00468. Исследования первого автора также поддержаны грантом РФФИ 10-01-93112.

Список литературы

[1] *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Акад. Наук Укр. ССР, 1945.

[2] *Capietto A., Mawhin J., Zanolin F.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 329. № 1. P. 41–72.

[3] *Каменский М. И., Макаренков О. Ю., Нистри П.* // ДАН 2003. Т. 388. № 4. С. 439–442.

[4] *Колесов Ю. С.* // ДАН 1969. Т. 10. С. 1290–1293.

[5] *Копнин Ю. М.* // Инж. Жур. 1965. Т. 5. № 2. С. 217–226.

[6] *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

[7] *Makarenkov O., Ortega R.* // J. Differential Equations 2011. T. 250. № 1. P. 39–52.

[8] *Макаренков О. Ю.* // Труды ММО. 2009. Т. 70. С. 4–45.

[9] *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Техтеоргиз, 1956.

[10] *Mawhin J.* // Bull. Soc. Roy. Sci. Liége 1969. V. 38. P. 308–398.

[11] *Мельников В. К.* // Труды ММО. 1963. Т. 12. С. 3–52.

[12] *Nakajima F., Seifert G.* // J. Differential Equations. 1983. V. 49. P. 430–440.

[13] *Ortega R.* // World Congress of Nonlinear Analysts ’92. De Gruyter, Berlin, 1996. P. 383–394.

[14] *Тхай В. Н.* // ПММ 2010. Т. 74. № 5. С. 812–823.

[15] *Yagasaki K.* // SIAM J. Appl. Math. 1996. V. 56. № 6. P. 1720–1756.

О. Ю. Макаренков (автор для переписки): Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова, 117997, ул. Профсоюзная 65, Москва, Россия и Имперский Колледж Лондона, SW7 2AZ, Великобритания (omakarenkov@mail.ru).
Служебный телефон: (495) 334-86-60

И. С. Мартынова: Воронежская государственная технологическая академия, 394036, пр. Революции 19, Воронеж, Россия (i_martynova@inbox.ru).
Служебный телефон: (4732) 552-550